# 2015年　本試　数学IA　第1問　二次関数

$\boxed{\text{アイ}}$

$y=-x^2+2x+2$

$y=-(x-1)^2+3$

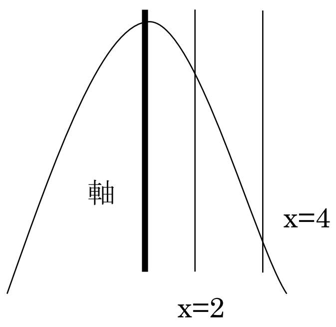
より、頂点は$(1,3)$

$\boxed{\text{ウエ}}$

頂点が$(1,3)$から$(1+p,3+q)$に移ったので、

$$f(x)=-\{x-(1+p)\}^2+3+q$$

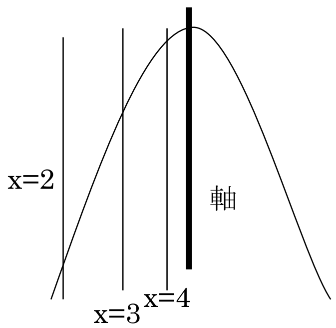
グラフは上に凸だから、x=2 で最大となるには次の図のようになればいい。




つまり、軸 $1+p\leqq 2$ （軸がちょうど x=2 でも条件を満たすので不等号は≦）

よって $p\leqq 1$

$\boxed{\text{オカ}}$




定義域 2≦x≦4 の中央である x=3 よりも、軸が右側にあれば x=2 で最小となる。

つまり、軸 $1+p\geqq 3$ （軸がちょうど x=3 でも条件を満たすので不等号は≧）

よって $p\geqq 2$

$\boxed{\text{キクケコサシ}}$

解答欄から「解なし」とはならない様子なので、「方程式 $f(x)=0$ の解が $x=-2,3$ である」と問題を置き換える。

$f(x)=-\{x-(1+p)\}^2+3+q$ で、 $f(-2)=f(3)=0$ だから、

$$-\{-2-(1+p)\}^2+3+q=-\{3-(1+p)\}^2+3+q$$

$$-(-3-p)^2=-(2-p)^2$$

$$(-3-p)^2=(2-p)^2$$

$$(3+p)^2=(2-p)^2 \qquad \leftarrow(-A)^2=A^2$$

$$3+p=\pm(2-p) \qquad \leftarrow A^2=B^2 \text{ のとき } A=\pm B$$

よって、

$3+p=2-p$ または $3+p=-2+p$

前者は $p=-\dfrac{1}{2}$ 、後者は p が消え、不適。よって、 $p=-\dfrac{1}{2}$

また、$-\{-2-(1+p)\}^2+3+q=0$ より、

$$q=(-3-p)^2-3$$

$$=\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2-3$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3$$

$$=\frac{25}{4}-3$$

$$=\frac{13}{4}$$

## 2015 年　本試　数学 IA　第 1 問　論理・三角比

**[1] 論理**

$\boxed{ア}$

対偶は否定の逆。

$p_1$かつ$p_2$全体を否定すると、$\overline{p_1\text{かつ}p_2} = \overline{p_1}$または$\overline{p_2}$

$q_1$かつ$q_2$全体を否定すると、$\overline{q_1\text{かつ}q_2} = \overline{q_1}$または$\overline{q_2}$

よって、「$\overline{q_1}$または$\overline{q_2}$」ならば「$\overline{p_1}$または$\overline{p_2}$」

$\boxed{イウエ}$

「$p_1$かつ$p_2$」は、n も n+2 も素数となるような 30 以下の自然数 n だから、

$\{n = 3,5,11,17,29\}$（1 は素数ではない）　・・・①

「$\overline{q_1}$かつ$q_2$」は、n+1 が、6 の倍数であるが 5 の倍数ではない 30 以下の自然数 n だから、

$\{n+1 = 6,12,18,24\}$より

$\{n = 5,11,17,23\}$　・・・②

①を満たしながら②を満たさないものが反例なので、$n = 3,29$

**[2] 三角比**

$\boxed{\text{オ}}$

余弦定理より、

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos 120^\circ$$

$$AC^2 = 34 - 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AC^2 = 49$$

$AC = 7$ （$AC > 0$ より）

$\boxed{\text{カキ}}$

$$\sin \angle ABC = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

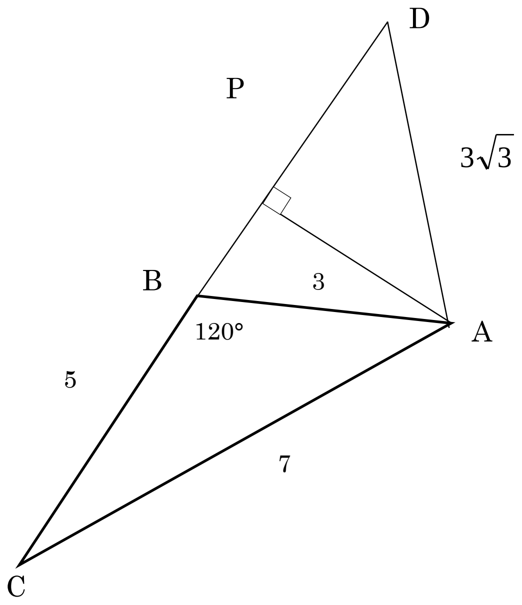
$\boxed{\text{クケコサ}}$

正弦定理より、

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BA}{\sin \angle BCA}$$

$$\sin \angle BCA = \frac{BA}{AC} \sin \angle ABC = \frac{3}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$\boxed{\text{シスセ}}$




（点 D を AB より下側の直線 BC 上にとると∠ADC は鈍角になってしまう）

△APC で正弦定理より、$\dfrac{AC}{\sin \angle APC} = 2R$

$$\frac{7}{2\sin \angle APC} = R \quad ・・・①$$

ここで点 P が線分 BD 上を B から D に向かって動くとき $\angle APC$ の大きさの変化を見る。

(i) P=B のとき $\angle APC$ ＝120°（$\sin \angle APC = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$）

　これより P が D に向かうと、$\angle APC$ は小さくなっていく。（$\sin \angle APC$ は**増えていく**）

(ii) BD⊥AP となるとき $\angle APC$ ＝90°（$\sin \angle APC = \sin 90^\circ = 1$。この時 $\sin \angle APC$ は最大。）

　これより P が D に向かうと、$\angle APC$ は小さくなっていく。（$\sin \angle APC$ は**減っていく**）

(iii) P=D のとき、△CAD で正弦定理より $\dfrac{7}{\sin \angle APC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin \angle ACB}$

つまり、$\sin \angle APC = \dfrac{7}{3\sqrt{3}} \sin \angle ACB = \dfrac{7}{3\sqrt{3}} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{1}{2}$

P はここまで動くので、以上をまとめると、$\dfrac{1}{2} \leqq \sin \angle APC \leqq 1$ となる。

よって①より $\dfrac{7}{2\times 1} \leqq R \leqq \dfrac{7}{2\times \frac{1}{2}}$、つまり、$\dfrac{7}{2} \leqq R \leqq 7$ となる。

# 2015 年　本試　数学 IA　第 3 問　データの分析

$\boxed{\text{ア}}$

全部で 40 人いるから、第 3 四分位数は低い方から数えて、30 番目と 31 番目の平均となる。

30 番目も 31 番目も 25 以上 30 未満の階級に入っている。

$\boxed{\text{イウエオ}}$

・最小値は 5 以上 10 未満→全て OK

・最大値は 45 以上 50 未満→全て OK

・第 1 四分位数は 15 以上 20 未満→0 番、1 番、4 番は正しい。2 番、3 番、5 番は誤り。

・中央値は 20 以上 25 未満→全て OK

・第 3 四分位数は 25 以上 30 未満→1 番、4 番、5 番は正しい。0 番、2 番、3 番は誤り。

よって 1 番、4 番以外は不適。

$\boxed{\text{カキ}}$

A-a : 全員の記録が下がっているのに第 1 四分位数の存在する階級が上がっているのがおかしい。

初めの第 1 四分位数は 15 以上 20 未満に存在していたので、下位 4 分の 1 は 20 未満に存在していたことになる。全員の記録が落ちれば同じく下位 4 分の 1 はどんなに高くても 20 未満に存在する。第 1 四分位数の存在する階級が上がることはない。

B-b : 全員の記録が上がっているので、最小値、最大値、四分位数が同じか上の階級になっていてもおかしくない。

C-c : 初めに最高点をとった人も記録を伸ばしたはずなのに、最大値が下がっているのがおかしい。

D-d : 最小値、第 1 四分位数が下がり、最大値、第 3 四分位数が上がっていてもおかしくない。

$\boxed{\text{ク}}$

相関係数を計算する。

分母は「1 回目の標準偏差×2 回目の標準偏差」、分子は共分散

$$\frac{54.3}{8.21\times 6.98} \fallingdotseq \frac{54.3}{8.2\times 7} = \frac{54.3}{57.4} \fallingdotseq 0.94$$

※0.01 や 0.02 の差は無視していい。先に四捨五入すると計算が楽。なお、相関係数は－1 から 1 までの値を取る。

## 2015年　本試　数学IA　第4問　確率

$\boxed{アイ}$

左端は3色のどれでもいいので3通り。

その右隣は1色目と違う2色から選ぶので2通り。

次も同様に2通り。

右端まで同様に2通り。

よって、$3\times2\times2\times2\times2=48$ 通り

$\boxed{ウエ}$

中央を赤とすると、その両隣は青または緑の2通り。両端は「赤」または「1つ前で選ばなかった色」のどちらかを塗るので、計 $2\times2=4$ 通り。

（具体的には、赤緑赤緑赤、赤青赤青赤、緑青赤青緑、青緑赤緑青の4通り）

中央が青の場合も緑の場合も同様に4通りずつあるので、計12通り。

$\boxed{オ}$

青緑青緑青または緑青緑青緑の2通り

$\boxed{カ}$

左端、中央、右端が赤。その間には青と緑を総当りで入れるので、$2\times2=4$ 通り。

（具体的には、赤青赤青赤、赤青赤緑赤、赤緑赤青赤、赤緑赤緑赤の4通り）

$\boxed{キ}$

赤が左端の場合：赤青緑青緑と赤緑青緑青

赤が右端の場合：青緑青緑赤と緑青緑青赤

以上4通り

$\boxed{クケコサ}$

赤が左から2番目の場合：青赤青緑青、青赤緑青緑、緑赤青緑青、緑赤緑青緑

赤が左から3番目の場合：青緑赤青緑、青緑赤緑青、緑青赤青緑、緑青赤緑青

赤が左から4番目の場合：青緑青赤青、青緑青赤緑、緑青緑赤青、緑青緑赤緑

以上12通り。$\boxed{キ}$と合わせれば赤が1枚なのは $4+12=16$ 通り。

$\boxed{シス}$

余事象を考える。全体から、赤が0枚（$\boxed{オ}$）、赤が1枚（$\boxed{コサ}$）、赤が3枚（$\boxed{カ}$）の場合をそれぞれ引く。$48-2-16-4=26$ 通り

## 2015年　本試　数学IA　第5問　整数

$\boxed{\text{アイウ}}$

$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$

$\boxed{\text{エオ}}$

**約数の個数：各素因数の指数+1を全てかける。**

$(2+1)\times(3+1)\times(1+1) = 3\times 4\times 2 = 24$

$\boxed{\text{カキ}}$

$\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7 \times m} = 2\times 3\times \sqrt{3\times 7\times m}$

ここで、$m = 3\times 7\times$(整数の2乗)であればいいので、$m = 3\times 7\times 1^2 = 21$が最小。

$\boxed{\text{クケコ}}$

$\sqrt{am} = 2\times 3\times \sqrt{3\times 7\times 21k^2} = 2\times 3\times 21\times k = 126k$

$\boxed{\text{サシスセ}}$

ユークリッドの互除法より

$126 = 11\times 11 + 5$　・・・①

$11 = 5\times 2 + 1$　・・・②

$1 = 11 - 5\times 2$　←②から「1＝」の形を作り出す。

$= 11 - (126 - 11\times 11)\times 2$　←①から5を消して11と126だけで表す

$= 11 - 126\times 2 + 11\times 22$

$= 126\times(-2) - 11\times(-23)$

$126k - 11l = 1$

$-)\ 126\times(-2) - 11\times(-23) = 1$

---

$126(k+2) - 11(l+23) = 0$　←辺々引いて右辺の1を消す

$126(k+2) = 11(l+23)$　←126と11は互いに素なのでk+2は11の倍数

$k + 2 = 11n$

$k = 11n - 2$（nは整数）

最小の自然数$k$は$n = 1$として$k = 9$

このとき、$126(k+2)=11(l+23)$に、$k=9$を代入して

$126\times 11=11(l+23)$

$l+23=126$

$l=103$

※念のため、$l$も解を出しておくと、

$126(k+2)=11(l+23)$で、$k+2=11n$ （n は整数）を代入して、

$126\times 11n=11(l+23)$

$126n=l+23$

$l=126n-23$

（$\boxed{\text{シスセ}}$ではここで$n=1$とした）

$\boxed{\text{ソタチツ}}$

$\sqrt{am}$ は 11 で割ると 1 余る自然数なので、$\sqrt{am}=11l+1$ （$l$ は 0 以上の整数）とおける。

ここで、$\boxed{\text{クケコ}}$より $m=21k^2$、$\sqrt{am}=126k$ （$k$ は自然数）だから、一次不定方程式、

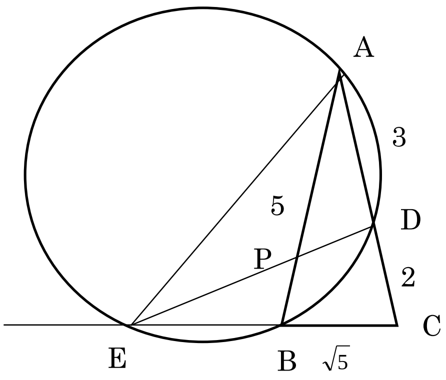
$126k-11l=1$が成立する。

この方程式の解は(3)より、$k=11n-2$、$l=126n-23$ （n は整数）となり、最小の自然数$k$は$n=1$として$k=9$である（$\boxed{\text{サ}}$より）。

問題文(2)より、$m=21k^2$なので、最小の自然数$m$は$k=9$を代入して、$m=21\times 9^2=1701$

## 2015年　本試　数学IA　第6問　図形の性質

$\boxed{アイ}$




方べきの定理より、

$CE \cdot CB = CD \cdot CA = 2 \times 5 = 10$

$\boxed{ウ}$

$$CE = \frac{10}{CB} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$BE = CE - CB = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$\boxed{エオカ}$

BはCEの中点だから、ABは中線。

重心は中線AB上にあり、ABを2：1に内分する点だから、AG$=5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$\boxed{キク}$

メネラウスの定理より、

$$\frac{PD}{EP} \times \frac{AC}{DA} \times \frac{BE}{CB} = 1$$

$$\frac{PD}{EP} \times \frac{5}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\frac{PD}{EP} = \frac{3}{5}$$

$\boxed{\text{ケコ}}$

弧 BD についての円周角より∠CAB=∠CED

∠C が共通だから、△ABC∽△EDC

AB：ED＝BC：DC＝AC：EC

5：ED＝$\sqrt{5}$：2＝5：$2\sqrt{5}$

$$ED = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$\boxed{\text{サシス}}$

$\frac{PD}{EP} = \frac{3}{5}$ より、PD：EP＝3：5

$$EP = \frac{5}{8}ED = \frac{5}{8} \times 2\sqrt{5} = \frac{5}{4}\sqrt{5}$$

# 2015年　本試　数学IIB　第1問　三角関数・指数対数関数

## [1] 三角関数

$\boxed{\text{ア}}$

$$OP=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=\sqrt{4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{4}=2$$

$\boxed{\text{イ}}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta+\cos 7\theta, 2\sin\theta+\sin 7\theta)-(2\cos\theta, 2\sin\theta)=(\cos 7\theta, \sin 7\theta)$ より

$$PQ=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}=1$$

$\boxed{\text{ウエオ}}$

$$OQ^2=(2\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin 7\theta)^2$$

$$=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta)+4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$$

$$=4+1+4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$$

$$=5+4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$$

$$=5+4\cos(7\theta-\theta)$$　←加法定理

$$=5+4\cos 6\theta$$

$\boxed{\text{カキ}}$

$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より

$6\times\frac{\pi}{8}\leqq 6\theta\leqq 6\times\frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}\leqq 6\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$　・・・①

$-1\leqq\cos 6\theta\leqq 0$

ここで、$OQ=\sqrt{5+4\cos 6\theta}$ だから、$\cos 6\theta=0$ つまり、$6\theta=\frac{3\pi}{2}$、$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき、

$OQ=\sqrt{5}$ が最大値。

$\boxed{\text{ク}}$

直線 OP は原点を通るので、y 切片は 0 となる。傾きを考えて、

$$y=\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}x$$

$$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$$

$$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$$

$\boxed{\text{ケ}}$

直線 $(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$ 上に Q があればいいので、ここに Q の座標を代入する。

$$\sin\theta(2\cos\theta+\cos 7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin 7\theta)=0$$

$$2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 7\theta-2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin 7\theta=0$$

$$\sin\theta\cos 7\theta-\cos\theta\sin 7\theta=0$$

$\sin(\theta-7\theta)=0$ ←加法定理

$$\sin(-6\theta)=0$$

$$-\sin 6\theta=0$$

$$\sin 6\theta=0$$

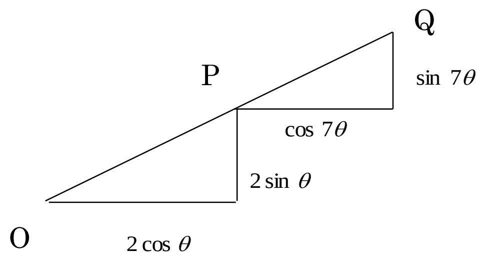
ここで①より、$\frac{3\pi}{4}\leqq 6\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ だから、

$$6\theta=\pi$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

別解

OP と PQ の傾きが等しいので、




$$\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}=\frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta}$$

$$\tan\theta=\tan 7\theta$$

よって、

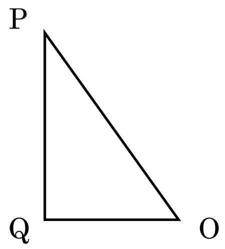
$\theta=7\theta+2n\pi$ 、または、$\theta=7\theta+\pi+2n\pi$ （$n$ は整数）

$6\theta=-2n\pi$ 、または、$6\theta=-(1+2n)\pi$

ここで①より、$\frac{3\pi}{4}\leqq 6\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ だから、

$6\theta=-(1+2n)\pi$ で $n=1$ として、$6\theta=\pi$ 、$\theta=\frac{\pi}{6}$ のみ成立する。

$\boxed{\text{コ}}$




三平方の定理より、$OQ^2 + PQ^2 = OP^2$

$OP = 2$、$PQ = 1$ （$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イ}}$より）だから、

$OQ^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$OQ = \sqrt{3}$

$\boxed{\text{サシ}}$

$OQ^2 = 5 + 4\cos 6\theta$ （$\boxed{\text{オ}}$より）だから、

$\sqrt{3}^2 = 5 + 4\cos 6\theta$

$3 = 5 + 4\cos 6\theta$

$\cos 6\theta = -\dfrac{1}{2}$

ここで①より、$\dfrac{3\pi}{4} \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ だから、

$6\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ ←240°

$\theta = \dfrac{2}{9}\pi$

[2] 指数・対数

$\boxed{\text{スセソタチツテ}}$

$$xy^{\frac{3}{2}} = a \qquad ・・・①$$

$$x^{\frac{1}{3}}y = b \qquad ・・・②$$

②の両辺を 3 乗して、

$$xy^{3} = b^{3}$$

$$x = b^{3}y^{-3} \qquad ・・・③$$

①に代入して、

$$b^{3}y^{-3}y^{\frac{3}{2}} = a$$

$$y^{-\frac{3}{2}} = ab^{-3}$$

$$\left(y^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(ab^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y = a^{-\frac{2}{3}}b^{2}$$

③に代入して

$$x = b^{3}\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{2}\right)^{-3} = a^{2}b^{3}b^{-6} = a^{2}b^{-3}$$

$\boxed{\text{トナニ}}$

$b = 2a^{\frac{4}{3}}$ だから、

$$x = a^{2}b^{-3} = a^{2}\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} = 2^{-3}a^{2}a^{-4} = 2^{-3}a^{-2}$$

$$y = a^{-\frac{2}{3}}b^{2} = a^{-\frac{2}{3}}\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^{2} = 2^{2}a^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{8}{3}} = 2^{2}a^{\frac{6}{3}} = 2^{2}a^{2}$$

$\boxed{ヌネノハ}$

$2^{-3}a^{-2} \geqq 0$ 、$2^2a^2 \geqq 0$ なので相加相乗平均より最小値は、

$$x + y = 2^{-3}a^{-2} + 2^2a^2 \geqq 2\sqrt{2^{-3}a^{-2} \times 2^2a^2} = 2\sqrt{2^{-1}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

等号が成り立つのは、

$2^{-3}a^{-2} = 2^2a^2$

$2^{-5} = a^4$

$a = 2^{-\frac{5}{4}}$

のときである。

## 2015年　本試　数学IIB　第2問　微分積分

アイ

$$\text{平均変化率} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{\frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}(a^2+2ah+h^2) - \frac{1}{2}a^2}{h} = \frac{ah+\frac{1}{2}h^2}{h} = a + \frac{h}{2}$$

ウエ

上の平均変化率の式について、h を限りなく 0 に近づけたものが微分係数。

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0}\left(a+\frac{h}{2}\right) = a$$

※普段は $f'(x) = x$ から $f'(a) = a$ と計算する。

オカ

$f'(a) = a$ より、

$$y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2$$

$$y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

キク

$y = 0$ として、

$$ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$a \neq 0$ より

$$x = \frac{1}{2}a$$

よって、$Q(\frac{a}{2},0)$

$\boxed{\text{ケコサシス}}$

m の傾きは$-\dfrac{1}{a}$で、$Q(\dfrac{a}{2},0)$を通るから、

$$y=-\frac{1}{a}(x-\frac{a}{2})$$

$$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{セソ}}$

m の式で$x=0$として、$y=\dfrac{1}{2}$

よって、$A(0,\dfrac{1}{2})$、$P(a,\dfrac{a^2}{2})$、$Q(\dfrac{a}{2},0)$

3 点の座標がわかったので、座標と面積の公式を使う。

**座標と面積の公式：**$O(0,0)$、$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$**のとき、**$\Delta OPQ\ =\dfrac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$

A を原点に平行移動するために、3 点の y 座標を$\dfrac{1}{2}$下げると、

$A'(0,0)$、$P'(a,\dfrac{a^2-1}{2})$、$Q'(\dfrac{a}{2},-\dfrac{1}{2})$となる。座標と面積の公式より、S=△A’P’Q’を計算する。

$$S=\frac{1}{2}\left|a\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{a^2-1}{2}\times\frac{a}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{a}{2}-\frac{a\left(a^2-1\right)}{4}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{2a}{4}-\frac{a\left(a^2-1\right)}{4}\right|$$

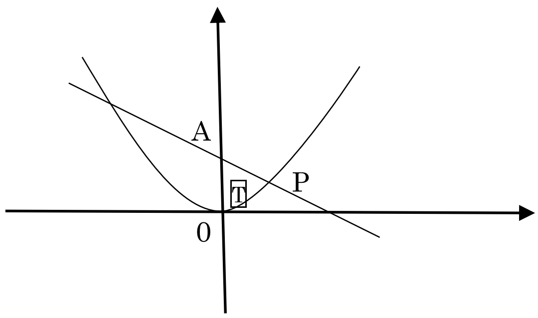
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2a}{4}+\frac{a\left(a^2-1\right)}{4}\right| \qquad \leftarrow\left|-A\right|=\left|A\right|$$

$$=\frac{|a|}{8}\left|2+\left(a^2-1\right)\right|$$

$$=\frac{a}{8}\left|a^2+1\right| \qquad \leftarrow a>0 \text{ より}$$

$$=\frac{a(a^2+1)}{8} \qquad \leftarrow a^2+1>0 \text{ より}$$

タチツ




AP の式： $y=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{a-0}\left(x-0\right)+\dfrac{1}{2}$

$$y=\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)x+\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$$

$$T=\int_0^a\left(\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\left[\frac{a^2-1}{4a}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{a^2-1}{4a}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a^3$$

$$=\frac{3a(a^2-1)}{12}+\frac{6a}{12}-\frac{2a^3}{12}$$

$$=\frac{a^3+3a}{12}$$

$$=\frac{a(a^2+3)}{12}$$

$\boxed{テトナ}$

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}$$
$$=\frac{3a(a^2+1)}{24}-\frac{2a(a^2+3)}{24}$$
$$=\frac{3a^3+3a-2a^3-6a}{24}$$
$$=\frac{a^3-3a}{24}$$
$$=\frac{a(a^2-3)}{24}$$

$\boxed{ニ}$

$a>0$ なので、$S-T$ の正負は $a^2-3$ 次第。
$a^2-3>0$ とすると、

$$(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})>0$$

$a>0$ と併せて、$a>\sqrt{3}$

$\boxed{ヌネノハヒ}$

$g(a)=\dfrac{a(a^2-3)}{24}$ とする。

$$g'(a)=\frac{3a^2-3}{24}=\frac{a^2-1}{8}$$

$g'(a)=0$ となるのは $a^2=1$、$a>0$ より $a=1$

本当に最小値になるかどうかは確認しなくても、センター試験なのでそのまま、

$g(1)=\dfrac{1-3}{24}=-\dfrac{1}{12}$ をマークして OK。

※念のため増減表を書くと、$a=1$ で確かに最小値になっている。

| $a$ | 0 | ・・・ | 1 | ・・・ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | | − | 0 | ＋ |
| $g(a)$ | | ↘ | $-\frac{1}{12}$ | ↗ |

## 2015年　本試　数学IIB　第3問　数列

アイウエオ

$\{2^n\}=\{2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024\ ...\}$

$a_1=2$、$a_2=4$、$a_3=8$、$a_4=6$、$a_5=2$・・・

一の位は2,4,8,6を繰り返す。4つで1周期だから、$a_{n+4}=a_n$

※$a_{5n}=a_n$も正解となるが、流れから言うと$a_{n+4}=a_n$をヒントとして以降の問題を解くのがいい。

カ

「①を繰り返し用いる」というヒントがあるのでおとなしく従う。

$$
\begin{aligned}
b_{n+4} &= \frac{a_{n+3}b_{n+3}}{4} \\
&= \frac{a_{n+3}}{4}b_{n+3} \\
&= \frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}}{4}b_{n+2} \\
&= \frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{4}b_{n+1} \\
&= \frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{4}\cdot\frac{a_n}{4}b_n \\
&= \frac{a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot a_n}{2^8}b_n
\end{aligned}
$$

キ

$a_n$は2,4,8,6を繰り返すので、連続する4項の積は2,4,8,6の積となる。（かける順番はどうでもいい）

よって、$a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot a_n=2\times4\times8\times6=3\times2^7$

$\boxed{\text{クケ}}$

まとめると、$b_{n+4}=\dfrac{a_{n+3}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot a_n}{2^8}b_n=\dfrac{3\times2^7}{2^8}b_n=\dfrac{3}{2}b_n$

$\boxed{\text{コサ}}$

書き出す。$\{b_{4k-3}\}=\{b_1, b_5, b_9, b_{13}\dots\}$

ここで、$\boxed{\text{クケ}}$より $b_k$ の 4 つ先の項を出すには$\dfrac{3}{2}$倍すればいいので、$b_{4k-3}$ は初項$b_1$、公比$\dfrac{3}{2}$の等比数列となる。

$b_1=1$ より、$b_{4k-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$\boxed{\text{シス}}$

書き出す。$\{b_{4k-2}\}=\{b_2, b_6, b_{10}, b_{14}\dots\}$

ここで、$\boxed{\text{クケ}}$より $b_k$ の 4 つ先の項を出すには$\dfrac{3}{2}$倍すればいいので、$b_{4k-2}$ は初項$b_2$、公比$\dfrac{3}{2}$の等比数列となる。

$b_2=\dfrac{a_1b_1}{4}=\dfrac{2\times1}{4}=\dfrac{1}{2}$ より、$b_{4k-2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$\boxed{\text{セソ}}$

書き出す。$\{b_{4k-1}\}=\{b_3, b_7, b_{11}, b_{15}\dots\}$

ここで、$\boxed{\text{クケ}}$より $b_k$ の 4 つ先の項を出すには$\dfrac{3}{2}$倍すればいいので、$b_{4k-1}$ は初項$b_3$、公比$\dfrac{3}{2}$の等比数列となる。

$b_3=\dfrac{a_2b_2}{4}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{1}{2}$ より、$b_{4k-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$b_{4k}$についても同様に、$\{b_{4k}\}=\{b_4, b_8, b_{12}, b_{16}...\}$

ここで、$\boxed{クケ}$より$b_k$の4つ先の項を出すには$\dfrac{3}{2}$倍すればいいので、$b_{4k}$は初項$b_4$、公比$\dfrac{3}{2}$の等比数列となる。

$b_4=\dfrac{a_3 b_3}{4}=\dfrac{8\times\frac{1}{2}}{4}=1$より、$b_{4k}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$\boxed{タチ}$

$S_{4m}$は$b_1$から$b_{4m}$までの和だから書き出すと、

$$S_{4m}=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+...+b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m}$$

4つごとに区切ると、

$$S_{4m}=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+...+(b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m})$$

↑第1群　↑第2群　↑第m群

$S_{4m}$を出すには、まず第m群に含まれる4項の和を求め、それを使って第1群から第m群まで全て足せばいい。

ここで、$\boxed{コサシスセソ}$より、

$b_{4m-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$、$b_{4m-2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$、$b_{4m-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$、$b_{4m}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$だから、

$$b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m}=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}=3\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}$$

$$S_{4m}=\sum_{k=1}^{m}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})$$

$$=\sum_{k=1}^{m}3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$= 3\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^m}{1-\frac{3}{2}}$$ ←等比数列の和の公式

$$= 3\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^m}{-\frac{1}{2}}\times\frac{(-2)}{(-2)}$$

$$= -6\left\{1-\left(\frac{3}{2}\right)^m\right\}$$

$$= 6\left(\frac{3}{2}\right)^m - 6$$

$\boxed{ツテ}$

同じく、$\boxed{コサシスセソ}$より

$$b_{4k-3}\cdot b_{4k-2}\cdot b_{4k-1}\cdot b_{4k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4k-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}$$

$\boxed{トナ}$

まず書き出す。

$$T_{4m} = b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot b_4\cdot b_5\cdot b_6\cdot b_7\cdot b_8 \ldots b_{4m-3}\cdot b_{4m-2}\cdot b_{4m-1}\cdot b_{4m}$$

4 つごとに区切ると、

$$T_{4m} = (b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot b_4)\cdot(b_5\cdot b_6\cdot b_7\cdot b_8)\ldots(b_{4m-3}\cdot b_{4m-2}\cdot b_{4m-1}\cdot b_{4m})$$

↑第 1 群　　　↑第 2 群　　　　　↑第 m 群

$T_{4m}$ を出すには、まず第 m 群に含まれる 4 項の積を求め、それを使って第 1 群から第 m 群まで全てかければいい。

第 m 群に含まれる 4 項の積については$\boxed{\text{ツテ}}$より、$b_{4m-3}\cdot b_{4m-2}\cdot b_{4m-1}\cdot b_{4m}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4(m-1)}$だから、

$$T_{4m}=\underset{\uparrow\text{第 1 群}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(1-1)}}\cdot\underset{\uparrow\text{第 2 群}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(2-1)}}\cdot\ldots\cdot\underset{\uparrow\text{第 m 群}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot1-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot2-4}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{4m-4}$$

↑$\dfrac{1}{4}$だけ m 個集めた　　　↑指数の部分は一旦展開した

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{(4\cdot1+4\cdot2+\ldots+4m)-4m}$$

↑指数の部分、－4 を m 個集めた

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{4(1+2+\ldots+m)-4m}$$

↑指数の部分、4 でくくった

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot\frac{m(1+m)}{2}-4m}$$

↑指数の部分、1 から m までの和

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2m(1+m)-4m}$$

$$=\frac{1}{4^{m}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2m^{2}-2m}$$

$\boxed{\text{ニヌネ}}$

$T_{10}=b_1\times b_2\times\ldots\times b_8\times b_9\times b_{10}=T_8\times b_9\times b_{10}$ だから、$T_8$、$b_9$、$b_{10}$ をそれぞれ求める。

$\boxed{\text{トナ}}$ より、$T_8=\dfrac{1}{4^2}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\cdot 2^2-2\cdot 2}=\dfrac{1}{2^4}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{3^4}{2^8}$

また、$\boxed{\text{コサシスセソ}}$ より、

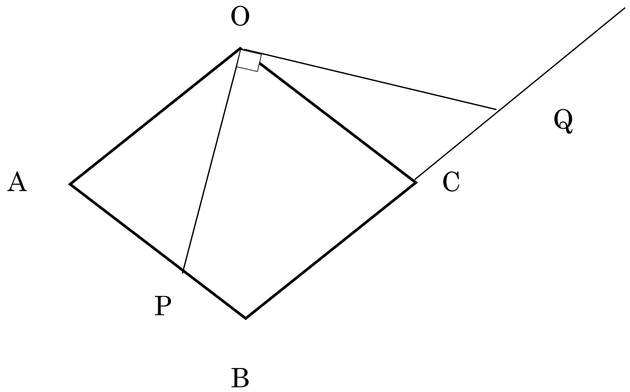
$b_{4m-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$ で $m=3$ として、$b_9=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$b_{4m-2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m-1}$ で $m=3$ として、$b_{10}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

よって、$T_{10}=T_8\times b_9\times b_{10}=\dfrac{3^4}{2^8}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3^8}{2^{13}}$

## 2015年　本試　数学IIB　第4問　ベクトル

$\boxed{\text{アイウ}}$




$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$\boxed{\text{エ}}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ だから、

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = (1-t)\vec{b} + t(\vec{b} - \vec{a}) = -t\vec{a} + \vec{b}$$

$\boxed{\text{オカ}}$

∠AOC＝120°より∠OAB＝60°

また、ひし形の対称性よりOBは∠AOCの2等分線だから、∠AOB＝60°

よって、△ABOは正三角形だから、OA=OB=1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{キ}}$

OPとOQは垂直だから、内積$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$

$\boxed{クケ}$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-t\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(-t\vec{a}+\vec{b}\right)$$ $\leftarrow\frac{1}{3}$ を出しておくと計算しやすい

$$=\frac{1}{3}\left(-t\left|\vec{a}\right|^2+(-2t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+2\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-t+(-2t+1)\times\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2t+\frac{5}{2}\right)$$

$\frac{1}{3}\left(-2t+\frac{5}{2}\right)=0$ より

$$t=\frac{5}{4}$$

$\boxed{コサ}$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2$$ $\leftarrow\left(\frac{1}{3}\right)^2$ を出しておくと計算しやすい

$$=\frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(1+4\times\frac{1}{2}+4\times1\right)$$

$$=\frac{7}{9}$$

よって、

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\boxed{\text{シス}}$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 = \left|-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left|-5\vec{a}+4\vec{b}\right|^2 \qquad \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{を出しておくと計算しやすい}$$

$$= \frac{1}{16}\left(25\left|\vec{a}\right|^2 - 40\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(25\times 1 - 40\times\frac{1}{2} + 16\times 1\right)$$

$$= \frac{21}{16}$$

よって、

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

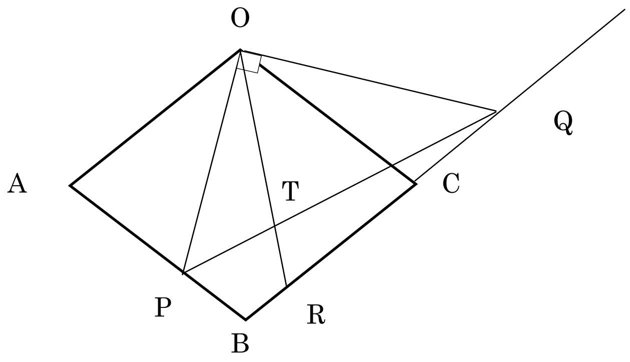
$\boxed{\text{ソタチツ}}$

△OPQ で∠POQ＝90°だから、OP を底辺とすると OQ が高さになる。

よって、

$$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

テトナニ




$$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}=r\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)=r\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=r\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\right)=-\frac{1}{4}r\vec{a}+r\vec{b}$$

また、

$$\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\frac{1-s}{3}-\frac{5}{4}s\right)\vec{a}+\left(\frac{2(1-s)}{3}+s\right)\vec{b}$$

係数比較して、

$$\frac{1-s}{3}-\frac{5}{4}s=-\frac{1}{4}r \qquad \cdots ①$$

$$\frac{2(1-s)}{3}+s=r \qquad \cdots ②$$

①×12 より、

$$4-4s-15s=-3r$$

$$4-19s=-3r$$

$$-4+19s=3r \qquad \cdots ③$$

②×3 より、

$$2-2s+3s=3r$$

$$2+s=3r \qquad \cdots ④$$

③、④より、

$$-4+19s=2+s$$

$$s=\frac{1}{3}$$

④より、

$$2+\frac{1}{3}=3r$$

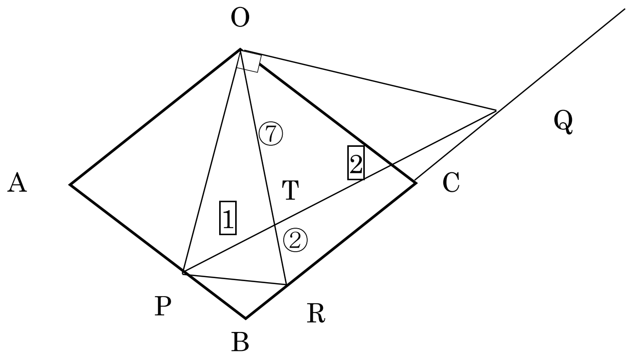
$$r = \frac{7}{9}$$

$\boxed{ヌネノハヒフ}$

$\overrightarrow{OT} = r\overrightarrow{OR} = -\dfrac{1}{4}r\vec{a} + r\vec{b}$ と $r = \dfrac{7}{9}$ より

$\overrightarrow{OT} = -\dfrac{7}{36}\vec{a} + \dfrac{7}{9}\vec{b}$

$\boxed{ヘホ}$




$\overrightarrow{OT} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{OR}$ より、$OT : TR = 7 : 2$

$\overrightarrow{OT} = (1-\dfrac{1}{3})\overrightarrow{OP} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$ より、$PT : TQ = 1 : 2$

△OPT と△OPQ は高さが共通で、底辺の比が 1 : 3 だから、面積比も 1 : 3。

よって、△OPT＝$\dfrac{1}{3}S_1$

△OPT と△PRT は高さが共通で、底辺の比が 7 : 2 だから、面積比も 7 : 2。

よって、△PRT＝$S_2 = \dfrac{1}{3}S_1 \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{21}S_1$

以上より、$S_1 : S_2 = S_1 : \dfrac{2}{21}S_1 = 1 : \dfrac{2}{21} = 21 : 2$